

LXXI олимпиада по математике Эстонии
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА
Таллинн, 11 января 2024 года
X класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Во время сенокоса хозяин Андрес нанял батрака Мадиса на четыре недели. Сразу договорились о величине зарплаты. В конце каждой недели Мадис получал определенную часть от этой договорной зарплаты. В первую неделю он получил четверть от всей зарплаты. Во вторую неделю он получил оплату, которая была на 10% больше, чем за первую неделю. Оплата, полученная за третью неделю составляла 60% от той суммы, которую он получил за первую и вторую недели вместе. В последнюю неделю Андрес выплатил последнюю часть зарплаты, о которой договорились первоначально, и добавил к ней в качестве премии несколько сентов, которые составили 1% от суммы, о которой договорились первоначально. Всего на четвертой неделе Мадис получил 3 кроны и 40 сентов. Какова величина первоначальной договорной зарплаты? (1 крона = 100 сентов)
2. Пусть число m – такое положительное целое число, при котором уравнение $m^2 - x(x + 1) = 212$ имеет два различных целочисленных корня. Найдите все возможные значения параметра m .
3. На биссектрисе острого угла BAC внутри прямоугольного треугольника ABC находится точка D , из которой проведен перпендикуляр DE к катету AC . Точка E находится на катете AC . При этом величина угла ADE в семь раз больше величины угла DBC . Докажите, что треугольник ADB является равнобедренным тогда и только тогда, когда $\angle ADB = 126^\circ$.
4. Натуральные числа могут быть четными и нечетными. Что можно сказать в обоих случаях о четности натуральных чисел m и n , если
 - а) при делении числа $m^2 + n^2$ на 4 в остатке получается число 2;
 - б) при делении числа $m^2 - n^2$ на 4 в остатке получается или число 1 или число 3?Обоснуйте свои утверждения.
5. Юку делает следующий карточный фокус: он предлагает Мари из колоды, содержащей 27 карт, выбрать одну карту не показывая эту карту Юку, запомнить ее, вернуть карту обратно в колоду, затем перемешать карты в колоде и вернуть колоду Юку. Юку берет от Мари перемешанную колоду, содержащую 27 карт, и выкладывает карты по очереди в три кучки, показывая при этом карты Мари. Затем он просит Мари сказать в какую из кучек попала карта, которую она выбрала. Юку собирает карты вместе так, чтобы кучка с выбранной Мари картой, оказалась посередине. Карты из полученной большой колоды Юку опять раскладывает поочередно в три кучки, показывая карты Мари. Затем он опять просит Мари сказать в какую из кучек попала карта, которую она выбрала. Юку собирает карты вместе так, чтобы кучка с выбранной Мари картой, оказалась посередине. Карты из полученной большой колоды Юку в третий раз раскладывает поочередно в три кучки, показывая карты Мари. Опять просит Мари сказать в какую кучку попала выбранная ею карта и собирает карты вместе так, чтобы кучка с выбранной Мари картой, оказалась посередине. Может ли Юку, используя эту информацию, определить карту, которую выбрала Мари? Если да, то на каком месте в образованной колоде окажется выбранная Мари карта? Объясните!